С. О. Шевцов, Н. С. Грудкіна

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ЕКОНОМІКИ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

С. О. Шевцов, Н. С. Грудкіна

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ЕКОНОМІКИ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Посібник
до практичних занять і самостійної роботи

Затверджено
на засіданні вченої ради
Протокол № 10 від 28.03.2019

Краматорськ
ДДМА
2019

УДК 517.33
Ш 37

Рецензенти:

Лов'янова І. В., д-р пед. наук, доцент кафедри математики та методики її навчання Криворізького державного педагогічного університету, м. Кривий Ріг;

Реутова І. М., канд. пед. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь.

Шевцов С. О.
Ш 37 Розв'язання задач з економіки методами математичного аналізу: посібник до практичних занять і самостійної роботи /С. О. Шевцов, Н. С. Грудкіна. – Краматорськ : ДДМА, 2019. – 55 с.
ISBN 978-966-379-884-4

Посібник містить теоретичний матеріал з математичного аналізу, що супроводжується прикладами розв'язання типових завдань теоретичного та прикладного характеру з економіки, а також завданнями для самостійного виконання студентами. Може використовуватись як викладачами відповідного курсу з математики для економістів, так і студентами для самостійної роботи.

УДК 517.33

ISBN 978-966-379-884-4

ЗМІСТ

ВСТУП

У курсі вищої математики для економічних спеціальностей є декілька тем, які, по-перше, входять складовою частиною до курсу вищої математики, а по-друге, є базою для розуміння багатьох ключових понять дисципліни загалом. До таких тем можна віднести розділ «Математичний аналіз», що містить у собі поняття границі числової послідовності, змінної величини і функції, неперервності функції у точці та на інтервалі, похідної та дослідження функцій, інтегральне числення. Розуміння основних положень цього розділу надає змоги студенту швидше і глибше засвоїти цілу низку економічних понять, зокрема: еластичність економічних показників, оптимальні значення продуктивності праці, прибутку, витрат, визначення середніх значень економічних показників.

Посібник складається з чотирьох розділів, три з них присвячені основним розділам математичного аналізу та типовим економічним задачам за відповідними темами. Четвертий розділ складається з індивідуальних домашніх завдань.

Автори посібника поставили перед собою такі задачі:

- не замінюючи курсу лекцій або підручника, познайомити студента з основними теоретичними положеннями, визначеннями і теоремами (без доведення);
- детально розібрати основні типові приклади;
- надати студенту можливість самостійно навчитися розв’язувати аналогічні задачі;
- окреслити коло задач, які можуть бути запропоновані за різними напрямами економічних понять;
- запропонувати набір індивідуальних домашніх завдань, який викладачі можуть використовувати у навчальному процесі студентів. З цього набору викладач може підібрати необхідний об’єм завдань, виходячи з вимог робочого плану дисципліни.

1 ПОЧАТОК АНАЛІЗУ

1.1 Функція

1.1.1 Основні означення, що стосуються поняття функції

Поняття функції є одним з найважливіших понять математики і її додатків в тому числі для економічних чинників. За допомогою різних функцій може бути описано багато процесів і законів економіки.

Означення 1.1. Нехай X і Y – деякі множини. Коли через деякий закон f кожному елемента (аргументу функції) $x \in X$ ставиться відповідно один і тільки один елемент (значення функції) $y \in Y$, то говорять, що задано функцію $y = f(x)$. Множина X – область визначення функції, множина Y – область значення функції.

У математичному аналізі часто X позначають як D (область визначення функції), а Y як E (область значень) і при цьому D і E називають підмножинами R (безлічі дійсних чисел).

Основні способи задавання функції це: графічний, табличний та аналітичний.

Функція задана **аналітично**, якщо функціональна залежність виражена у вигляді формули, яка вказує сукупність тих математичних операцій, які повинні бути виконані, щоб за даним значенням аргументу знайти відповідне значення функції. При аналітичному завданні функції вказують область визначення або не вказують. Функція задається у вигляді $y = f(x)$, $x \in D$, де D– область визначення функції, у другому випадку – у вигляді $y = f(x)$. Наприклад, для функції $y = x^2$, область визначення $D(x) \in R$ і область значень $y \geq 0$.

Графічний спосіб завдання функції крім геометричного зображення функції, заданої рівнянням, зручний тоді, коли функцію важко задати аналітично. Задати функцію графічно – це значить побудувати її графік. Графік функції надає наочного уявлення про її властивості. Наприклад, графік лінійної функції $y = kx + b$ – пряма лінія. Таким чином, під графіком функції розуміється безліч точок площині, декартові координати яких задовольняють заданому рівнянню.

Означення 1.2. Графіком числової функції $y = f(x)$ називається безліч точок площини з координатами $(x\, f(x))$, абсциси яких – числа з області визначення функції, а ординати – відповідні значення з області значень.

При **табличному** способі завдання функції поряд з числовим значенням аргументу записується відповідне значення функції. Широко відомі таблиці квадратів і кубів чисел, квадратних коренів. Недоліком табличного способу завдання функції є те, що в таблиці можуть бути вказані аргументи і функції не загалом, а лише окремі їх значення. Особливості зміни функції при цьому можуть бути спотворені або втрачені.

1.1.2 Типові приклади, що стосуються поняття функції

Приклад 1.1. Знайти області визначення функцій:

а) $y = \sqrt{2x - 6}$;

б) $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} + \ln(x - 2)$.

Розв'язання:

а) як відомо підкореневий вираз квадратного кореня повинен бути невід'ємним, тому $2x - 6 \geq 0$, звідки область визначення функції $x \in [3;+\infty)$;

б) з одного боку, оскільки арифметичний корінь обчислюється тільки з невід'ємних чисел, то область визначення буде визначатися з розв'язання нерівності $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$. Розв'яжемо нерівність методом інтервалів: $-x^2 + 2x + 3 = 0$, корені цього рівняння: $x_1 = -1, x_2 = 3$ (рис. 1.1).

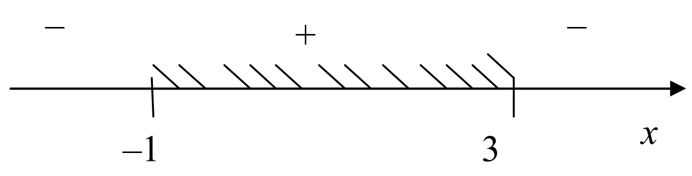

Рисунок 1.1

Тобто $x \in [-1;3]$.

З іншого боку, оскільки аргументом логарифма повинно бути додатне число, то область визначення буде також визначатися з розв'язання нерівності $x-2>0$, тобто $x\in(2;+\infty)$.

Знаходимо область визначення, як перетин отриманих множин (рис. 1.2).

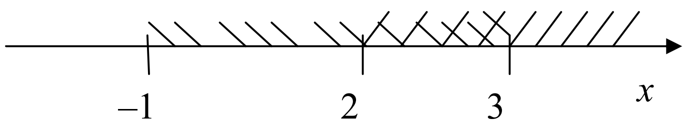

Рисунок 1.2

Відповідь: а) $x\in[3;+\infty)$; б) $x\in(2;3]$.

Приклад 1.2. Дослідним шляхом встановлено функції попиту $q(p)=-p+7$ і пропозиції $s(p)=p+1$, де p– ціна товару, q і s – кількості товару, що купується і запропонованого на продаж. Знайти: рівноважну ціну та ціну товару, за якою попит буде переважати над пропозицією. Побудувати графіки попиту та пропозиції на одному рисунку, зробити економічний аналіз результату.

Розв'язання

Рівноважна ціна – це така ціна, за якою обсяг товару, що купується, дорівнює обсягу товару, пропонованого на продаж. Тобто $q(p)=s(p)$.

Розв'яжемо рівняння

$$-p+7=p+1\Rightarrow p=3.$$

Рівноважна ціна дорівнює 3. Якщо ціна на товар 3 гр. од., попит дорівнює пропозиції і дорівнює 4 од. товару.

Умова «попит переважає над пропозицією» означає розв'язання нерівності $q(p)\geq s(p)$, звідки:

$$-p+7\geq p+1\Rightarrow p\leq 3.$$

Побудуємо графіки функцій попиту та пропозиції, оскільки функції лінійні, то графіками будуть прямі (рис. 1.3).

Пряма $q(p)=-p+7$ проходить через точки $M_1(0;7)$ та $M_2(3;4)$.

Пряма $s(p)=p+1$ проходить через точки $M_3(0;1)$ та $M_2(3;4)$.

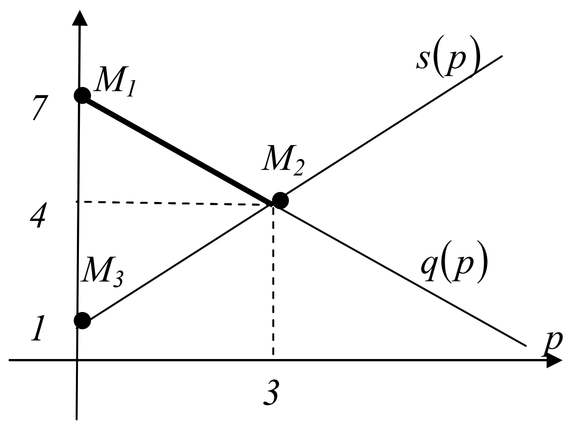

Рисунок 1.3

Відповідь: за ціною на товар 3 гр. од. попит дорівнює пропозиції і дорівнює 4 од. товару. Коли ціна на товар буде менше ніж 3 гр. од., попит буде перебільшувати пропозицію.

1.1.3 Задачі для самостійної роботи за темою «Функція»

1. Знайти області визначення функцій:

а) $y = \ln \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$, б) $y = x\sqrt{25 - x^2}$,

в) $y = \ln \dfrac{2x - 4}{x}$, в) $y = \dfrac{x}{\sqrt{2x - 3}}$.

2.Дослідним шляхом встановлено функції попиту $q(p) = -2p + 11$ і пропозиції $s(p) = p + 5$, де p – ціна товару, q і s– кількості товару, що купується і запропонованого на продаж. Знайти: рівноважну ціну та ціну товару,за якою попит буде переважати над пропозицією. Побудувати графіки попиту та пропозиції на одному рисунку, зробити економічний аналіз результату.

3. Дослідним шляхом встановлено функції попиту $q(p) = -p + 9$ і пропозиції $s(p) = 3p + 1$, де p – ціна товару, q і s – кількості товару, що купується і запропонованого на продаж. Знайти: рівноважну ціну та ціну товару, за якою пропозиція буде переважати над попитом. Побудувати графіки попиту та пропозиції на одному рисунку, зробити економічний аналіз результату.

1.2 Границя функції

1.2.1 Основні означення та формули за темою «Границя функції»

Означення 1.1. (Означення за Коші). Число A називають границею функції $f(x)$ в точці x_0, коли для будь-кого $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх значень $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ виконується $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначають границю у вигляді: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Можна переформулювати означення таким чином: границя функції (граничне значення функції) у заданій точці така величина, до якої прямує значення аналізованої функції за умови, що її аргумент прямує до заданої точки.

Означення 1.2. Функцію $\alpha(x)$ називають нескінченно малою величиною навколо точки x_0, коли $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Означення 1.3. Функцію $\beta(x)$ називають нескінченно великою величиною навколо точки x_0, коли $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = \infty$.

Умовно відношення нескінченно малих величин позначають у вигляді $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, а нескінченно великих величин $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Такі відношення задають основні невизначеності при обчисленні границь, інші випадки невизначеностей зводяться до них.

Означення 1.4. Функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ називають еквівалентними в околоті точки x_0, коли $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$.

Позначають $f_1(x) \sim f_2(x)$ при $x \to x_0$.

Треба зауважити, що означення справедливе, як для нескінченно малих величин, так і для нескінченно великих.

Надалі будемо позначати: $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина; $\beta(x)$ – нескінченно велика величина.

Теорема 1.1. Границя відношення двох нескінченно малих величин дорівнює межі відношення еквівалентних їм нескінченно малих величин.

Тобто вірні граничні рівності:

коли $\alpha_1(x) \sim \alpha_1^*(x)$ та $\alpha_2(x) \sim \alpha_2^*(x)$ при $x \to x_0$, тоді $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)}$.

Теорема 1.2.Границя відношення двох нескінченно великих величин дорівнює границі відношення еквівалентних їм нескінченно великих величин.

Тобто вірні граничні рівності:

коли $\beta_1(x)\sim\beta_1^*(x)$ та $\beta_2(x)\sim\beta_2^*(x)$ при $x\to x_0$,

тоді $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta_1^*(x)}{\beta_2^*(x)}$.

При обчисленні границь часто використовують такі співвідношення еквівалентностей:

- при $x\to\infty$

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n\sim a_0x^n,$$

- при $x\to\infty$

$$\sqrt[k]{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n}\sim\sqrt[k]{a_0x^n}\ .$$

З першої стандартної границі $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ отримали висновки:

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),\ \arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x),$$
$$\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x),\ \operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x).$$

З другої стандартної границі $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ отримали висновки:

$$\lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\,\beta(x)},$$

$$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x),\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x),$$
$$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a\,,(1+\alpha(x))^m-1\sim m\alpha(x).$$

1.2.2 Типові приклади за темою «Границя функції»

Приклад 1.3.Обчислити границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-14}{x^2+6x-16}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{4x^3-x^2+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{x^2\,\mathrm{tg}\,x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4-x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{3x-13}{2x-5}\right)^{\frac{x+3}{x-8}}$.

Розв'язання:

а) при $x\to 2$ границя чисельника і знаменника дорівнює 0, тоді отримаємо невизначеність вигляду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Для розкриття невизначеності розкладемо чисельник і знаменник на множники:

$$\frac{x^2+5x-14}{x^2+6x-16}=\frac{(x-2)(x+7)}{(x-2)(x+8)}.$$

Розділимо чисельник і знаменник на $(x-2)$, це скорочення можливе, оскільки $x\to 2$, але $x\neq 2$. Тому для всіх $x\neq 2$ маємо $\dfrac{x^2+5x-14}{x^2+6x-16}=\dfrac{x+7}{x+8}$, границі цих функцій дорівнюють одна одній. Тоді:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x-14}{x^2+6x-16}=\lim_{x\to 2}\frac{x+7}{x+8}=\frac{9}{10}=0{,}9;$$

б) при $x\to\infty$ границі чисельника і знаменника не існують і одночасно прямують до ∞. Отримаємо невизначеність вигляду $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Для розкриття невизначеності чисельник і знаменник поділимо на x^3. Тоді, з рахуванням, що $\left\{\frac{1}{\infty}\right\} = 0$, отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3 - x + 1}{4x^3 - x^2 + x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{4} = 0.5;$$

в) при $x \to 0$ границя чисельника і знаменника дорівнює 0, то отримаємо невизначеність вигляду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Для розкриття невизначеності перетворимо дріб з використанням тригонометрії:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^2 \operatorname{tg} x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x^3}{x^3}\right)\cdot x \cdot \frac{\cos x}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x^3}{x^3}\right)\cdot \frac{\cos x}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x^3}{x^3}\right)\cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = 1\cdot\frac{1}{1} = 1;$$

г) при $x \to \infty$ значення обох підкореневих виразів прямує до ∞. Отримаємо невизначеність вигляду $\{\infty - \infty\}$. Для розкриття невизначеності перетворимо вираз на дріб, помножимо чисельник і знаменник на спряжений множник. Тоді отримаємо невизначеність вигляду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, розкриття останньої виконаємо за допомогою еквівалентностей:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^4 + x^2} - \sqrt{x^4 - x^2} = \{\infty - \infty\} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4 + x^2} - \sqrt{x^4 - x^2}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4 + x^2} - \sqrt{x^4 - x^2}\right)\left(\sqrt{x^4 + x^2} + \sqrt{x^4 - x^2}\right)}{\sqrt{x^4 + x^2} + \sqrt{x^4 - x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^4 + x^2\right) - \left(x^4 - x^2\right)}{\sqrt{x^4 + x^2} + \sqrt{x^4 - x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^4 + x^2} + \sqrt{x^4 - x^2}} =$$

$$= \begin{Bmatrix} x \to \infty \\ \sqrt{x^4 + x^2} \sim x^2 \\ \sqrt{x^4 - x^2} \sim x^2 \end{Bmatrix} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{2x^2} = 1;$$

д) при $x \to 8$ вираз у дужках прямує до 1, вираз показника показує, що показник прямує до ∞. Отримаємо невизначеність вигляду $\{1^\infty\}$. Для розкриття невизначеності перетворимо вираз у дужках до вигляду $1+\alpha(x)$ та скористаємося висновком з другої стандартної границі: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\beta(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\,\beta(x)}$. Тоді отримаємо:

$$\lim_{x\to 8}\left(\frac{3x-13}{2x-5}\right)^{\frac{x+3}{x-8}} = \left\{1^\infty\right\} = \lim_{x\to 8}\left(\frac{2x-5+x-8}{2x-5}\right)^{\frac{x+3}{x-8}} = \lim_{x\to 8}\left(1+\frac{x-8}{2x-5}\right)^{\frac{x+3}{x-8}} =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} x\to 8 \\ \dfrac{x-8}{2x-5}\to 0 \\ \dfrac{x+3}{x-8}\to\infty \end{array}\right\} = e^{\lim\limits_{x\to 8}\frac{x-8}{2x-5}\cdot\frac{x+3}{x-8}} = e^{\lim\limits_{x\to 8}\frac{x+3}{(2x-5)}} = e^1 = e\,.$$

Відповідь: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-14}{x^2+6x-16} = 0{,}9$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{4x^3-x^2+x} = 0{,}5$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{x^2\,\mathrm{tg}\,x} = 1$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4-x^2} = 1$; д) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{3x-13}{2x-5}\right)^{\frac{x+3}{x-8}} = e$.

1.2.3 Неперервне нарахування відсотків

Розглянемо такі задачі:

1. Нехай початковий внесок у банк становив Q_n грошових одиниць. Банк виплачує щорічно P % річних. Необхідно визначити обсяг вкладу Q_t через t років. Розмір внеску щорічно збільшується в $\left(1+\dfrac{P}{100}\right)$ раз.

Тобто отримаємо нарахування:

$$Q_1 = Q_n\left(1+\frac{P}{100}\right),\ \ Q_2 = Q_n\left(1+\frac{P}{100}\right)^2,\ \ldots,\ Q_t = Q_n\left(1+\frac{P}{100}\right)^t.$$

2. Нехай відсоток нараховують n разів на рік, тоді за $\frac{1}{n}$ – у частину року відсоток нарахування складе $\frac{P}{n}$, а розмір внеску за t років при nt нарахуваннях

$$Q_t = Q_n\left(1+\frac{P}{100\,n}\right)^{nt}.$$

Зауваження 1.1. При $n \to \infty$ відсоток нараховується безперервно, при $n = 2$ – що півріччя, $n = 4$ – що квартально, $n = 365$ – щодня.

Тоді при безперервному нарахуванні відсотків:

$$Q_t = \lim_{n\to\infty}\left[Q_n\left(1+\frac{P}{100\cdot n}\right)^{nt}\right] = Q_n e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Pnt}{100n}} = Q_n e^{\frac{Pt}{100}}.$$

Це експонентний закон зростання (при $p > 0$) або зменшення (при $p < 0$).

На практиці у фінансово-кредитних операціях безперервне нарахування відсотків застосовується дуже рідко. Воно ефективно при аналізуванні серйозних фінансових проблем, зокрема, при обґрунтуванні і виборі інвестиційних рішень.

Приклад 1.4. Початковий внесок у банк становив 2 тис. гр. од. Банк виплачує щорічно 18 % річних. Необхідно визначити обсяг вкладу через 3 роки при зарахуванні відсотків щоквартально та порівняти з неперервним нарахуванням відсотків.

Розв'язання:

Згідно з зауваженням для щоквартального зарахування відсотків має місце формула

$$Q_t = Q_n\left(1+\frac{P}{100\cdot 4}\right)^{4t}.$$

У нашому випадку $Q_n = 2000$ гр. од., $P = 18$ %, тоді

$$Q_3 = 2000\cdot\left(1+\frac{18}{100\cdot 4}\right)^{4\cdot 3} \approx 3391{,}76\,.$$

При неперервному нарахуванні відсотків отримаємо:

$$Q_3 = Q_n e^{\frac{Pt}{100}} = 2000\cdot e^{\frac{18\cdot 3}{100}} \approx 3432{,}01.$$

Відповідь: при нарахуванні відсотків щоквартально отримаємо через три роки суму 3 391,76 гр. од., яка буде менше ніж 3 432,01 гр. од., яку можна отримати за той самий термін при неперервному нарахуванні відсотків.

1.2.4 Задачі для самостійної роботи за темою «Границя функції»

1. Обчислити границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5-3x^3+2}{1-x-x^4+2x^5}$, б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{6x^2+x-1}{3x^2+17x-6}$,

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{2x^3-3x^2-4}$, г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{(x-1)x}}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+4x+5}\right)$, е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{\sin^2 x}$,

ж) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2x^2}{\ln(1-3x)}$; и) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(2x-2)}{e^{x-1}}$;

к) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos 3x)^{\operatorname{tg} x}$ л) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

2. Початковий внесок у банк становив 3 тис. гр. од. Банк виплачує щорічно 15 % річних. Необхідно визначити обсяг вкладу через 4 роки при зарахуванні відсотків що півроку та порівняти з неперервним нарахуванням відсотків.

3. Початковий внесок у банк становив 8 тис. гр. од. Банк виплачує щорічно 8 % річних. Необхідно визначити обсяг вкладу через 3 роки при зарахуванні відсотків щомісяця та порівняти з неперервним нарахуванням відсотків.

2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

2.1 ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

2.1.1 Основні означення за темою «Похідна функції однієї змінної»

Поняття похідної та її економічний зміст досить широко використовується при розв'язанні задач економічного напряму.

Означення 2.1. Нехай в околоті точки $y = f(x)$. Похідною функції $y = f(x)$ в точці

$$f^{/}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

за умови, що границя існує.

На основі означення похідної були отримані важливі для обчислення формули та правила.

ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ

1	$y = x^{\alpha}$;	$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$.
2	$y = a^x$;	$y' = a^x \cdot \ln a$.
3	$y = e^x$;	$y' = e^x$;
4	$y = \log_a x$;	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
5	$y = \ln x$;	$y' = \dfrac{1}{x}$.
6.	$y = \sin x$;	$y' = \cos x$.
7	$y = \cos x$;	$y' = -\sin x$.
8	$y = \mathrm{tg}\, x$;	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
9	$y = \mathrm{ctg}\, x$;	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
10	$y = \arcsin x$;	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
11	$y = \arccos x$;	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
12	$y = \mathrm{arctg}\, x$;	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.
13	$y = \mathrm{arcctg}\, x$;	$y' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$.

ОСНОВНІ ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

1 $\left(U(x) \pm V(x)\right)' = U'(x) \pm V'(x)$.

2 $\left(U(x) \cdot V(x)\right)' = U'(x) \cdot V(x) + U(x) \cdot V'(x)$.

3 $\left(\dfrac{U(x)}{V(x)}\right)' = \dfrac{U'(x) \cdot V(x) - U(x) \cdot V'(x)}{V^2(x)}$.

4 $f'_x\left(U(x)\right) = f'_U \cdot U'_x(x)$.

5 $\left(U(x)^{V(x)}\right)' = V(x) \cdot U^{V-1} \cdot U'(x) + U(x)^{V(x)} \cdot \ln U(x) \cdot V'(x)$.

Означення 2.2. Нехай функція $y = f(x)$ визначена та диференційована в області D. Нехай $y' = f'(x)$ похідна від заданої функції, назвемо отриману функцію похідною першого порядку. Тоді другою похідною назвемо функцію y'', яка буде похідною від функції $y' = f'(x)$, тобто $y'' = (y')' = (f'(x))'$. Аналогічно за індукцією означається похідна третього порядку, четвертого і т. д.

Зрозуміло, що для обчислення похідної n-го порядну потрібно, щоб задана функція мала похідну n–1-го порядку. Тоді $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

2.1.2 Типові приклади за темою «Похідна функції однієї змінної»

Приклад 2.1. Знайти похідну функції:

а) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

б) $y = tg^3 x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$.

Розв'язання:

а) $$y' = \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{(\arcsin x)'\sqrt{1-x^2} - \arcsin x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)'} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} - \arcsin x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\left(1-x^2\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

б) $$y^{/} = \left(tg^3 x \cdot \sin\frac{1}{x}\right)^{/} = \left(tg^3 x\right)^{/} \cdot \sin\frac{1}{x} + tg^3 x \cdot \left(\sin\frac{1}{x}\right)^{/} =$$

$$= 3tg^2 x \cdot (tgx)^{/} \cdot \sin\frac{1}{x} + tg^3 x \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{/} =$$

$$= 3tg^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin\frac{1}{x} + tg^3 x \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2}.$$

Відповідь: а) $y' = \dfrac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

б) $y' = 3tg^2 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{tg^3 x \cdot}{x^2} \cos\dfrac{1}{x}$.

Приклад 2.2. Обчислити похідну функції $y = \ln(2x+3)$ у заданій точці $x_0 = 0$.

Розв'язання:

Знайдемо похідну:

$$y^{/} = (\ln(2x+3))^{/} = \frac{1}{2x+3} \cdot (2x+3)^{/} = \frac{2}{2x+3}.$$

Підставимо значення $x_0 = 0$ в похідну та отримаємо:

$$y^{/}(0) = \frac{2}{2 \cdot 0 + 3} = \frac{2}{3}.$$

Відповідь: $y^{/}(0) = \dfrac{2}{3}$.

Приклад 2.3. Обчислити похідну n-го порядку від функції $y = e^{2x}$.

Розв'язання

$$y' = \left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x},$$

$$y'' = \left(2e^{2x}\right)' = 2 \cdot 2e^{2x} = 2^2 e^{2x},$$

$$y''' = \left(2^2 e^{2x}\right)' = 2^3 e^{2x},$$

....

$$y^{(n)} = \left(2^{n-1} e^{2x}\right)' = 2^n e^{2x}.$$

Відповідь: $y^{(n)} = 2^n e^{2x}$.

Приклад 2.4. Для функції $y = x^2 \ln \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ обчислити $W = xy' - 2y$.

Розв'язання

Знайдемо y':

$$y' = \left(x^2 \ln \frac{x}{\sqrt{3}}\right)' = 2x \ln \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x^2\sqrt{3}}{x\sqrt{3}} = 2x \ln \frac{x}{\sqrt{3}} + x.$$

Підставимо в W:

$$W = xy' - 2y = 2x^2 \ln \frac{x}{\sqrt{3}} + x^2 - 2x^2 \ln \frac{x}{\sqrt{3}} = x^2.$$

Відповідь: $W = x^2$.

2.1.3 Задачі для самостійної роботи за темою «Похідна функції однієї змінної»

1. Знайти похідну функції:

а) $y = \dfrac{1}{x+3}$; б) $y = \ln 5x$;

в) $y = \cos 3x - \dfrac{1}{16}\dfrac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$; г) $y = (\sin x)^{\frac{5x}{2}}$.

2. Обчислити похідну функції в заданій точці:

а) $y = \sin\dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{3}\cos\dfrac{x}{3},\ x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

б) $y = \dfrac{e^{1-3x}}{9x-2},\ x_0 = \dfrac{1}{3}$;

в) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-5}}{x},\ x_0 = 3$.

3. Для функції $y = x^2\left(4 - \frac{\cos 3x}{3}\right)$ обчислити $W = y' - 2\frac{y}{x}$.

4. Обчислити похідну n-го порядку від функції $y = \sin 3x$.

2.2 Застосування диференціального числення функції однієї змінної

2.2.1 Деякі теореми та означення диференціального числення функції однієї змінної

Означення 2.3. Нехай функція $f(x)$ визначена в інтервалі $(a;b)$ і для будь-яких двох точок $x_1 < x_2$ з цього інтервалу виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$, тоді говорять, що функція $f(x)$ зростає в інтервалі $(a;b)$.

Означення 2.4. Нехай функція $f(x)$ визначена в інтервалі $(a;b)$ і для будь-яких двох точок $x_1 < x_2$ з цього інтервалу виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$, тоді говорять, що функція $f(x)$ спадає в інтервалі $(a;b)$.

Означення 2.5. Нехай функція $f(x)$ визначена та спадає або зростає в інтервалі $(a;b)$ тоді говорять, що функція $f(x)$ монотонна в інтервалі $(a;b)$.

Означення 2.6. Нехай функція $f(x)$ визначена в інтервалі $(a;b)$ та існують межі, у яких функція монотонна, тоді говорять, що функція $f(x)$ кусково-монотонна в інтервалі $(a;b)$.

Теорема 2.1. Нехай функція $f(x)$ неперервна та диференційована в інтервалі $(a;b)$, тоді для того, щоб функція $f(x)$ зростала (спадала) в інтервалі $(a;b)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всіх $x \in (a;b)$.

Означення 2.7. Нехай функція $f(x)$ визначена навколо точки x_0 та нехай для будь-якої точки x з цієї межі виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), тоді говорять, що функція $f(x)$ має максимум (мінімум) у точці x_0, це значення $f(x_0)$.

Точки, у яких функція набуває максимуму або мінімуму називають точками екстремуму, а значення функції в цих точках називають екстремумом.

Теорема 2.2. Нехай функція $f(x)$ визначена навколо точки x_0, тоді для того, щоб функція $f(x)$ мала екстремум в точці x_0, необхідно, щоб $f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ не існувала.

Означення 2.8. Точки x_i, у яких $f'(x_i)=0$ або не існує, називають критичними.

Теорема 2.3.Нехай функція $f(x)$ диференційована навколо точки x_0, можливо, крім самої точки, у якій неперервна. Тоді, якщо при переході через точку x_0 похідна функції змінює свій знак, то в точці x_0 функція має екстремум. До того ж, якщо знак похідної змінюється з "+" на "–", то функція $f(x)$ в точці x_0 має максимум, коли знак похідної змінюється з "–" на "+", то функція $f(x)$ в точці x_0 має мінімум.

2.2.2 Типові приклади за темою «Застосування диференціального числення функції однієї змінної»

Приклад 2.5.Знайти інтервали монотонності і екстремуми функції $y=(x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

Розв'язання:

Область визначення функції: $x\in R$. Знайдемо похідну:

$$y'=\left((x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)'=\left((x-5)^2\right)'(x+1)^{2/3}+(x-5)^2\left((x+1)^{2/3}\right)'=$$

$$=2(x-5)\sqrt[3]{(x+1)^2}+(x-5)^2\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{-1/3}=\frac{6(x-5)(x+1)+2(x-5)^2}{3\sqrt[3]{x+1}}=$$

$$=\frac{8x^2-44x+20}{3\sqrt[3]{x+1}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{2x^2-11x+5}{3\sqrt[3]{x+1}}=\frac{8}{3}\cdot\frac{(x-0,5)(x-5)}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

З умови y' не існує, можна отримати критичну точку $x_1=-1$.

З умови $y'=0$, маємо критичні точки:

$$\frac{8}{3}\cdot\frac{(x-0,5)(x-5)}{3\sqrt[3]{x+1}}=0\Rightarrow x_2=0,5,x_3=5\ .$$

Позначаємо точки на числовій прямій та визначаємо знак похідної на кожному з отриманих проміжків, та робимо висновки (рис. 2.1).

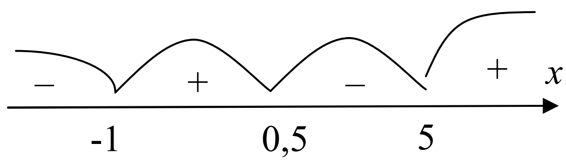

Рисунок 2.1

Відповідь: мінімуми функції в точках $x_1 = -1$ та $x_2 = 5$, максимум в точці $x_2 = 0,5$, функція зростає при $x \in (-1;0,5) \cup (5;+\infty)$, функція спадає $x \in (-\infty;-1) \cup (0,5;5)$.

Приклад 2.6.Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на проміжку $[-2;2]$.

Розв'язання:

Найбільше і найменше значення функції може знаходиться або в критичних точках, які належать проміжку, або на кінцях відрізка.

Знаходимо похідну: $y' = \left(x^4 - 2x^2 + 5\right)' = 4x^3 - 4x.$

З необхідної умови існування екстремуму визначаємо критичні точки:

$$y' = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1.$$

Усі точки належать відрізку $[-2;2]$, обчислимо значення функції в цих точках і на кінцях відрізку:

$$y(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 5 = 5,$$
$$y(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2 + 5 = 4,$$
$$y(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 5 = 4,$$
$$y(-2) = (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 + 5 = 13,$$
$$y(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 5 = 13.$$

Серед обчислених значень виберемо найбільше та найменше.

Відповідь: найбільше значення функції $y(-2) = y(2) = 13$, найменше значення функції $y(-1) = y(1) = 4$.

2.2.3 Задачі для самостійної роботи за темою «Застосування диференціального числення функції однієї змінної»

1. Знайти інтервали монотонності і екстремуми функцій:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$; б) $y = \dfrac{x^4}{4} - 8x$;

в) $y = x(x-3)^2$; г) $y = x^4 - 8x^2 + 16$.

д) $y=\cos 3x-\frac{1}{16}\frac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$; е) $y=(\sin x)^{\frac{5x}{2}}$.

2. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x+2\sqrt{x}$ на проміжку $[0;4]$.

2.3 Застосування диференціального числення функції однієї змінної під час розв'язання задач економічного змісту

2.3.1 Продуктивність праці

Нехай *U(t)*– кількість виробленої продукції *U* за час *t*. Необхідно визначити продуктивність праці. У момент від t_0 до $t_0+\Delta t$ кількість виробленої продукції зміниться від $U_0=U(t_0)$ до $U_0+\Delta U$.

Тоді середня продуктивність праці за період Δt $z_{cp}=\frac{\Delta U}{\Delta t}$ та

$z=\lim\limits_{\Delta t\to 0} z_{cp}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta t}=U'(t_0)$ – продуктивність праці в момент t_0.

Зауваження 2.1. Швидкість зміни продуктивності: $z'(t)$.

Зауваження 2.2. Логарифмічну похідну $T=(\ln z)=\frac{z'}{z}$ називають швидкістю зміни функції або темпом зміни функції. Тобто $T=\frac{z'}{z}$ – темп зміни продуктивності.

2.3.2 Середні і граничні витрати виробництва

Нехай x – кількість продукції, що випускається; y – витрати виробництва. Якщо Δx – приріст продукції, а Δy – приріст витрат виробництва, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – середній приріст витрат виробництва на одиницю продукції. Тоді $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x)$ – граничні витрати виробництва.

Аналогічно можна дати поняття таким економічним показникам: гранична виручка, граничний прибуток і ін. Граничні витрати приблизно характеризують додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

2.3.3 Еластичність і її застосування в економіці

Одним з найважливіших застосувань диференціального обчислення в економіці є введення за допомогою похідної поняття еластичності. Коефіцієнт еластичності показує відносну зміну досліджуваного економічного показника під дією одного з економічних чинників, від якого він залежить.

Еластичністю функції *y = f(x)* називається границя відношення відносних змін змінних *y* і *x*:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{f'(x)x}{f(x)}.$$

Еластичність попиту за ціною

$$E_p(q) = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q}$$

показує відносну зміну (у відсотках) величини попиту на будь-яке благо при зміні ціни цього блага на один відсоток і характеризує чутливість споживачів до зміни цін на продукцію.

Еластичність попиту за доходом:

$$E_I(q) = \frac{dq}{dI}\frac{I}{q}.$$

2.3.4 Розв'язання економічних задач за допомогою похідної

Приклад 2.7.Дослідним шляхом встановлено функції попиту $S = \frac{P+8}{P+2}$ і пропозиції П = Р + 0,5, де Р – ціна товару, S – кількість товару, що купується, і П – кількість запропонованого на продаж товару.

Знайти:

а) рівноважну ціну, тобто ціну, за якою попит і пропозиція врівноважуються;

б) еластичність попиту і пропозиції для цієї ціни;

в) зміну доходу при збільшенні ціни на 5 % від рівноважної.

Розв'язання:

а) рівноважну ціну знайдемо з рівняння $\frac{P+8}{P+2} = P + 0.5$, отримаємо Р = 2;

б) за формулою еластичності знаходимо:

$$E_p(S) = -\frac{6\text{P}}{(\text{P}+2)(\text{P}+8)}, \qquad E_p(\Pi) = \frac{2\text{P}}{2\text{P}+1}.$$

Для рівноважної ціни $\text{P}=2$ обчислюємо еластичності попиту: $E_p(S(2)) = 0{,}3$ і пропозиції: $E_p(\Pi(2)) = 0{,}8$. Оскільки отримано значення еластичностей за модулем менше ніж одиниця, то попит і пропозиція не еластичні щодо ціни.

При збільшенні ціни Р на 1 % попит зменшується на 0,3 %, а пропозиція збільшитися на 0.8 %;

в) при збільшенні ціни Р на 5 % від рівноважної попит зменшується на 1.5 %, отже дохід зростає на 3.5 %.

Відповідь: а) Р = 2; б) $E_p(S(2)) = 0{,}3$, $E_p(\Pi(2)) = 0{,}8$; в) дохід зростає на 3.5 %.

Приклад 2.8. Статистичним шляхом встановлено, що обсяг продукції цеху (ум. од.) протягом робочого дня описується функцією $u(t) = \frac{-20}{3}t^3 + 60t^2 + 140t + 300$, де t – час у годинах ($0 \le t \le 8$).

Знайти:

а) продуктивність праці, швидкість і темп її зміни через 3 години після початку роботи;

б) у який момент часу продуктивність праці буде найбільшою. Результат пояснити аналітично і графічно. Зробити економічний аналіз результатів.

Розв'язання:

а) продуктивність праці $z(t)$ визначається за формулою $z(t) = u'(t)$. Тому

$$z(t) = \left(\frac{-20}{3}t^3 + 60t^2 + 140t + 300\right)' = -20t^2 + 120t + 140.$$

Знаходимо продуктивність праці через 3 години після початку роботи:

$$z(3) = -20 \cdot 3^2 + 120 \cdot 3 + 140 = 320.$$

Швидкість зміни продуктивності знайдемо як першу похідну від $z(t)$:

$$z'(t) = \left(-20t^2 + 120t + 140\right)' = -40t + 120.$$

Знаходимо швидкість зміни продуктивності через 3 години після початку роботи:

$$z'(3) = -40 \cdot 3 + 120 = 0.$$

Далі обчислюємо темп зміни продуктивності:

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-40t + 120}{-20t^2 + 120t + 140}.$$

Та обчислюємо його значення через 3 години після початку роботи:

$$\frac{z'(3)}{z(3)} = \frac{-40 \cdot 3 + 120}{-20 \cdot 3^2 + 120 \cdot 3 + 140} = \frac{0}{320} = 0;$$

б) графік функції продуктивності праці являє собою параболу, гілки якої спрямовані вниз. Отже, найбільше значення цієї функції буде досягатися у вершині параболи. Для побудови графіка функції знайдемо координати вершини параболи: $t_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-120}{2 \cdot (-20)} = 3$, звідки $z(t_0) = z(3) = -20 \cdot 3^2 + 120 \cdot 3 + 140 = 320$.

Вершина параболи знаходиться в точці $M(3;320)$. Оскільки гілки параболи спрямовані вниз, то знайдемо точки перетину з віссю абсцис. Для цього дорівняємо до нуля:

$$-20t^2 + 120t + 140 = 0;$$
$$-t^2 + 6t + 7 = 0;$$
$$D = 36 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 64;$$
$$t_1 = \frac{-6-8}{-2} = 7, \quad t_2 = \frac{-6+8}{-2} = -1.$$

Для знаходження перетину з віссю Oz підставимо $t = 0$ в $z(t)$:

$$z(0) = -20 \cdot 0 + 120 \cdot 0 + 140 = 140.$$

Побудуємо графік функції (рис. 2.2).

За графіком бачимо, що продуктивність праці зростає в перші 3 години роботи, а потім поступово знижується до кінця робочого дня.

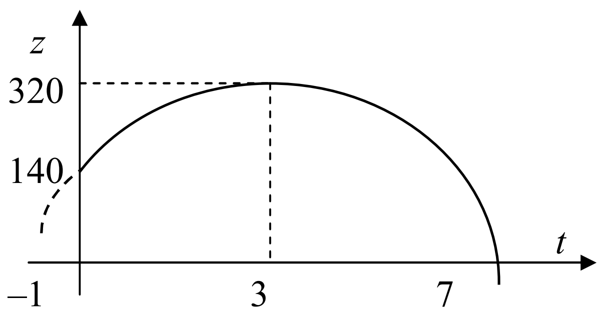

Рисунок 2.2

Відповідь: а) $z(3)=320$, $z'(3)=0$, $\dfrac{z'(3)}{z(3)}=0$; б) найбільшою продуктивність буде через 3 години після початку роботи та буде дорівнювати $z(3)=320$.

Приклад 2.9. Капітал у 7 млн грн. Може бути розміщений у банку під 40 % річних або інвестований у виробництво, причому ефективність вкладення очікується в розмірі 250 %. Витрати задаються квадратичною залежністю $\dfrac{x^2}{20}$. Прибуток від виробництва оподатковується в p %. При яких значеннях p вкладення у виробництво є більш ефективним, ніж чисте розміщення капіталу в банку?

Розв'язання:

Увесь капітал 7 млн грн розділимо на частини: x – у виробництво, $(7-x)$ – у банк під відсотки. Тоді через рік з банку можна отримати $(7-x)+(7-x)0{,}4$ – те, що вклали, і плюс відсотки, тобто $1{,}4(7-x)$ млн грн.

Дохід від виробництва через рік становитиме (враховуючи нараховані 250 %): $x+x\dfrac{250}{100}=x+2{,}5x=3{,}5x$ млн грн.

Тоді прибуток від вкладення у виробництво – це дохід мінус витрати $\dfrac{x^2}{20}$, тобто $3{,}5x-\dfrac{x^2}{20}$ млн грн.

Чистий прибуток від виробництва дорівнюватиме $3{,}5x-\dfrac{x^2}{20}-\left(3{,}5x-\dfrac{x^2}{20}\right)\dfrac{p}{100}$, оскільки прибуток оподатковується в р %.

Позначимо через $i=\dfrac{p}{100}$, тоді

$$3{,}5x-\frac{x^2}{20}-\left(3{,}5x-\frac{x^2}{20}\right)\frac{p}{100}=3{,}5x-\frac{x^2}{20}-\left(3{,}5x-\frac{x^2}{20}\right)i=\left(3{,}5x-\frac{x^2}{20}\right)(1-i).$$

Через рік загальна сума (від банку та від виробництва) прибутку становитиме:

$$S(x)=1{,}4(7-x)+\left(3{,}5x-\frac{x^2}{20}\right)(1-i).$$

Для розв’язання завдання необхідно знайти найбільше значення цієї функції на відрізку [0,7]. Для цього знаходимо похідну:

$$S'(x)=1{,}4(-1)+\left(3{,}5-\frac{2x}{20}\right)(1-i)=-1{,}4+\left(3{,}5-\frac{x}{10}\right)(1-i).$$

Прирівнюємо її до 0, зайдемо критичну точку:

$$S'(x)=0\Rightarrow -1{,}4+\left(3{,}5-\frac{x}{10}\right)(1-i)=0\Rightarrow x_0=35-\frac{14}{1-i}.$$

Тобто критична точка $x_0=35-\frac{14}{1-i}$. Оскільки визначається найбільше значення функції на відрізку [0,7], то ця точка повинна належати відрізку, тобто $0<x_0<7:0<35-\frac{14}{1-i}<7$.

У результаті розв’язання нерівностей, враховуючи економічний зміст, отримаємо: $i<\frac{21}{35}=0{,}6$.

Відповідь: вкладення у виробництво є більш ефективним при податку $p<60$ %.

3 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ

3.1 Невизначений інтеграл

3.1.1 Основні означення за темою «Невизначений інтеграл»

Означення 3.1. Функцію $F(x)$ називають первісною функцією для функції $f(x)$ на проміжку $x \in (a;b)$, коли для будь-якої точки цього проміжку виконується $F'(x) = f(x)$.

З геометричної точки зору $F(x)$ – функція, графік якої в кожній точці проміжку буде мати кутовий коефіцієнт, який дорівнює $f(x)$.

Означення 3.2. Множину всіх первісних для функції $f(x)$ на проміжку $x \in (a;b)$ називають невизначеним інтегралом та позначають у вигляді $\int f(x)dx = F(x) + C$, де функція $F(x)$– одна з первісних функції $f(x)$ на проміжку. При цьому $f(x)$називають підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, C – константою.

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
3. $\int d(F(x)) = F(x) + C$.
4. $\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx = aF(x) + C$.
5. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.
6. $\int f(u(x))d(u(x)) = F(u(x)) + C$.

ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$.
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
4. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
7. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C.$
8. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C.$
9. $\int e^x\,dx = e^x + C.$
10. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$
11. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\,arctg\,\dfrac{x}{a} + C.$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$ 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$

НАЙПРОСТІШІ ПРАВИЛА ІНТЕГРУВАННЯ

Нехай $\int f(x)dx = F(x) + C$, тоді:

1. $\int f(x+a)dx = F(x+a) + C$. 2. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

3. $\int udv = uv - \int vdu$ – формула інтегрування частинами.

3.1.2 Типові приклади за темою «Невизначений інтеграл»

Приклад 3.1.Інтеграли функції:

а) $\int \sqrt[3]{(2x+3)^2}dx$;

б) $\int \frac{x^2dx}{x^3+1}$;

в) $\int \mathrm{tg}^3 2x\, dx$;

г) $\int (4-16x)\sin 4x dx$.

Розв'язання:

а) $\int \sqrt[3]{(2x+3)^2}dx = \int (2x+3)^{2/3} dx = \frac{(2x+3)^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}\cdot 2} + C = \frac{3\cdot(2x+3)^{\frac{5}{3}}}{4} + C =$

$$= \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(2x+3)^5} + C;$$

б) $\int \frac{x^2dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3+1)}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right| + C$;

в) $\int \mathrm{tg}^3 2x\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = \mathrm{tg}\, 2x & dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u^2}du \\ x = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, u & \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{u^3}{1+u^2}du =$

$$=\frac{1}{2}\int\left(u-\frac{u}{1+u^2}\right)du=\frac{1}{2}\int udu-\frac{1}{4}\int\frac{d\left(1+u^2\right)}{1+u^2}=\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{4}\ln\left|1+u^2\right|+C=$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 2x-\frac{1}{4}\ln\left|1+\operatorname{tg}^2 2x\right|+C;$$

г) скористаємося формулою інтегрування частинами:

$$\int(4-16x)\sin 4xdx=\left\{\begin{matrix} u=4-16x & du=-16dx \\ dv=\sin 4xdx & v=-\frac{1}{4}\cos 4x \end{matrix}\right\}=-\frac{1}{4}(4-16x)\cos 4x-$$

$$-4\int\cos 4xdx=(4x-1)\cos 4x-\sin 4x+c.$$

Відповідь: а) $\int\sqrt[3]{(2x+3)^2}dx=\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(2x+3)^5}+C$; б) $\int\frac{x^2dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+C$;

в) $\int\operatorname{tg}^3 2x\,dx=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 2x-\frac{1}{4}\ln\left|1+\operatorname{tg}^2 2x\right|+C$;

г) $\int(4-16x)\sin 4xdx=(4x-1)\cos 4x-\sin 4x+c$.

3.1.3 Задачі для самостійної роботи за темою «Невизначений інтеграл»

1. Інтеграли функцій:

а) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}}$; б) $\int arctg\sqrt{3x-1}\,dx$;

в) $\int\frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx$; г) $\int\sqrt{16-x^2}\,dx$.

3.2 Визначений інтеграл

3.2.1 Основні означення за темою «Визначений інтеграл»

Розглянемо задачу про обчислення площі фігури, що обмежена лініями, які задані рівняннями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$. Тобто знайдемо площу криволінійної трапеції, яка обмежена цими лініями. Будемо вважати, що $f(x)\geq 0$ та неперервна на відрізку $x\in[a;b]$.

Поділимо відрізок на n частин (рис. 3.1).

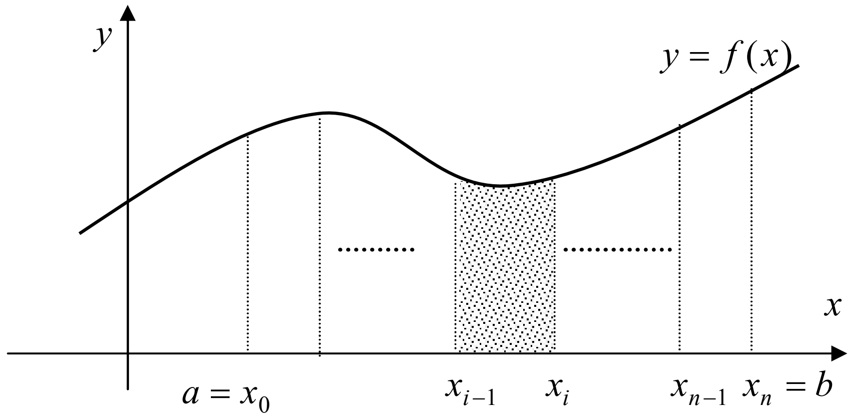

Рисунок 3.1

При цьому розглянемо найменше та найбільше значення функції на кожному з відрізків:

i-й відрізок: $x \in [x_{i-1}; x_i]$ найменше m_i, найбільше M_i. Тоді справедлива нерівність:

$$S_{\min} = m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 + \cdots + m_n \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i \le S \le S_{\max} =$$

$$= M_1 \cdot \Delta x_1 + M_2 \cdot \Delta x_2 + \cdots + M_n \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x .$$

Нехай $n \to \infty$ та при цьому $\max \Delta x_i \to 0$, тоді очевидно, що

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i = S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i .$$

Виберемо на відрізках довільні точки:

i-й відрізок: $\chi_i \in [x_{i-1}; x_i]$,

тоді $S_{\min} \le \sum_{i=1}^{n} f(\chi_i) \cdot \Delta x_i \le S_{\max}$.

Означення 3.3. Нехай $\max \Delta x_i \to 0$ та існує $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\chi_i) \cdot \Delta x_i = S$, тоді її називають визначеним інтегралом та позначають $\int_a^b f(x)dx$.

Тобто з точки зору **геометрії** $S = \int_a^b f(x)dx$ – це **площа криволінійної трапеції**, що обмежена лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

1. $\int\limits_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx$.

2. $\int\limits_a^b A\cdot f(x)dx = A\int\limits_a^b f_1(x)dx$, де A – константа.

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

* $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

4. Для будь-яких раціональних чисел a, b, c справедливо, що

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

5. Про інтегрування нерівностей.

Нехай $0 \le \varphi(x) \le f(x)$, до того ж $\varphi(x)$ та $f(x)$ неперервні на відрізку $x \in [a;b]$, тоді

$$\int\limits_a^b \varphi(x)dx \le \int\limits_a^b f(x)dx.$$

6. Оцінювання визначеного інтеграла.

Нехай m, M відповідно найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $x \in [a;b]$, тоді

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

7. Про середнє значення функції.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $x \in [a;b]$, тоді на цьому відрізку знайдеться принаймні одна точка $x = c$, у якій виконується рівність

$$f(c)(b-a) = \int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{або} \quad f(c) = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{(b-a)}$$ – формула обчислення середнього значення функції на відрізку.

Теорема 3.1.Коли функція $f(x)$ неперервна на відрізку $x \in [a;b]$, тоді (формула Ньютона – Лейбніца)

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція,

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз,

a, b – нижня та верхня межі інтегрування,

$F(x)$ – первісна для функції $f(x)$.

3.2.2 Типові приклади за темою «Визначений інтеграл»

Приклад 3.2. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2}$;

б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$;

в) $\int\limits_1^e \ln x^2 dx$.

Розв'язання:

а) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2} = \int\limits_1^2 x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{x}\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$;

б) скористаємося заміною змінних:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}dx = \left\{\begin{matrix} u = 1+\sin x & u_1 = 1+\sin 0 = 1 \\ du = \cos x dx, & u_2 = 1+\sin\frac{\pi}{2} = 2 \end{matrix}\right\} = \int\limits_1^2 \frac{du}{u} = \ln|u|\Big|_1^2 =$$

$$= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2;$$

в) скористаємося формулою інтегрування частинами:

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du;$$

$$\int\limits_1^e \ln x^2 dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x^2 & du = \frac{2dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{matrix}\right\} = x\ln x^2\Big|_1^e - 2\int\limits_1^e dx = e\ln e^2 - 1\cdot\ln 1^2 - 2x\Big|_1^e =$$

$$= 2e - 2e + 2 = 2.$$

Відповідь: а) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = \ln 2$; в) $\int\limits_1^e \ln x^2 dx = 2$.

Приклад 3.3. Обчислити площу фігури що обмежена лініями $y = x^2 - 4$ та $y = 5$. Зробити креслення.

Розв'язання

$y = x^2 - 4$ – парабола, гілки прямують в гору, вершина параболи точка $C(0;–4)$;

$y = 5$ – горизонтальна пряма. Побудуємо лінії на координатній площині (рис. 3.2).

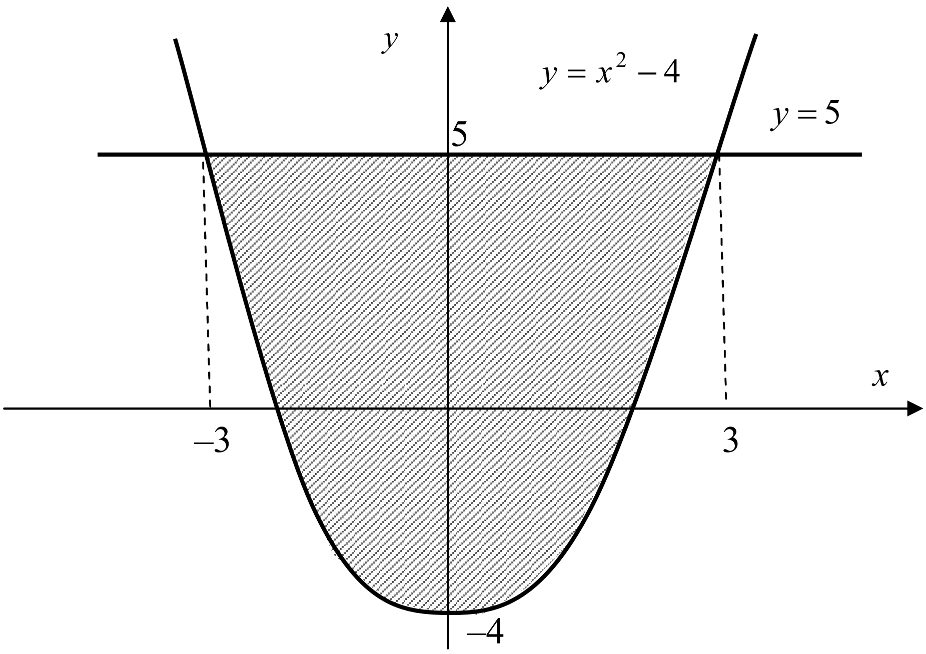

Рисунок 3.2

Визначаємо точки перетину ліній з розв'язання системи:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = 5. \end{cases}$$

Отримаємо точки $M_1(–3;5)$ та $M_2(3;5)$.

Площу фігури,розташованої між лініями, знайдемо за формулою

$$S = \int\limits_a^b \left(y_1(x) + y_2(x)\right) dx,$$

де $y_1(x)$– рівняння лінії обмежує фігуру зверху,

$y_2(x)$– рівняння лінії обмежує фігуру знизу. Тоді

$$S=\int_{-3}^{3}\left(5-\left(x^2-4\right)\right)dx=\int_{-3}^{3}\left(9-x^2\right)dx=\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3}=\left(9\cdot 3-\frac{3^3}{3}\right)-$$

$$-\left(9\cdot(-3)-\frac{(-3)^3}{3}\right)=(27-9)-(-27+9)=36.$$

Відповідь: $S=36$.

3.2.3 Задачі для самостійної роботи за темою «Визначений інтеграл»

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x^3}$; б) $\int_{0}^{1}\sqrt{8x+1}dx$;

в) $\int_{0}^{\ln 2}xe^x dx$; г) $\int_{0}^{1}x\sqrt{x+1}dx$.

2. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y=4-x^2$ та $y=-3x$. Зробити креслення.

3.3 Застосування інтегрального числення до розв'язання економічних задач

3.3.1 Коефіцієнт Джині

Розглянемо залежність відсотка доходів населення y_1 від відсотка населенняx_1, що має ці доходи. Ми будемо розглядати функцію $y = f(x)$, де $x=\frac{x_1}{100}$, $y=\frac{y_1}{100}$. Розглянемо рисунок 3.3.

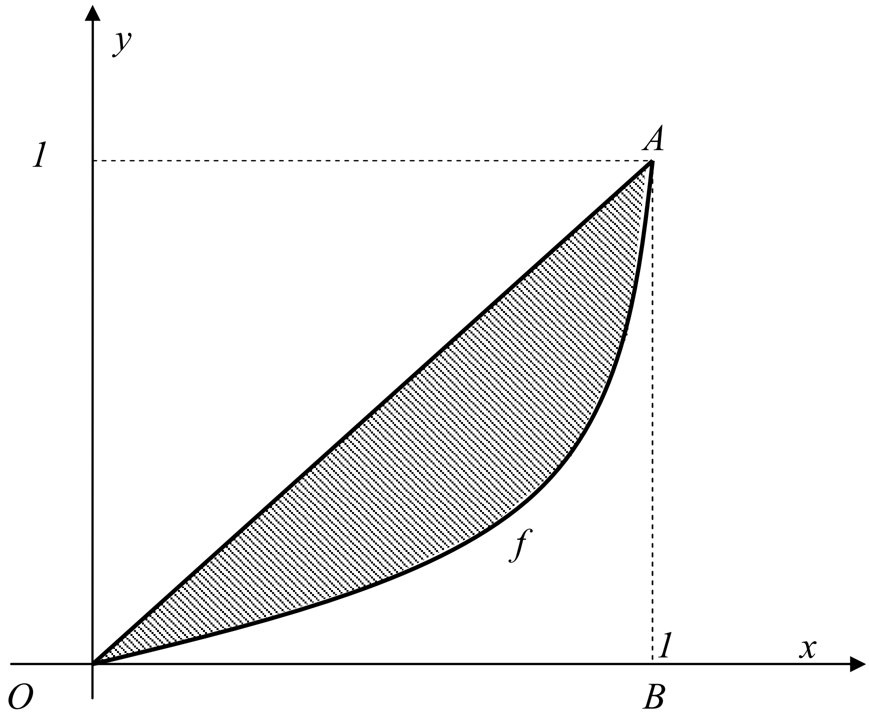

Рисунок 3.3 – Графічна інтерпретація розподілу доходів

За допомогою функції $y = f(x)$ (крива Лоренца) можна оцінити ступінь нерівномірності розподілу доходів населення. При рівномірному розподілі доходів крива вироджується в бісектрису *OA*.

Відношення площі сегмента *OAf* до площі трикутника *OAB* називається **коефіцієнтом Джині**. Цей коефіцієнт характеризує ступінь нерівності в розподілі доходів населення таким чином:

1) коли коефіцієнт Джині не перевищує 0.33, тоді розподіл доходів можна вважати близьким до рівномірного;

2) коли коефіцієнт Джині знаходиться в межах від 0.33 до 0.67, тоді розподіл доходів вважають нерівномірним;

3) коли коефіцієнт Джині понад 0.67, тоді розподіл доходів можна вважати істотно нерівномірним.

3.3.2 Обсяг продукції, що випускається

Відомо, що продуктивність праці протягом робочого дня змінюється. Нехай зміна продуктивності праці визначається функцією $f(t)$, де t – час, відлічуваний від початку робочого дня, а $f(t)$ – продуктивність праці в даний момент. Тоді величина

$$U=\int_0^T f(t)dt -$$

це обсяг продукції, що випускається за час $[0,T]$.

Часто при вирішенні практичних завдань доводиться знаходити середні значення функції, наприклад: середню продуктивність праці, середні витрати виробництва, середню потужність двигуна і т. д. У цих випадках використовують теорему про середнє значення (інтеграл). Тоді відносно розглянутої функції продуктивності праці буде мати місце формула (середнє значення продуктивності праці за проміжок часу від t_1 до t_2)

$$f_{сер}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt .$$

3.3.3 Дисконтований дохід

При вивченні економічної ефективності капітальних вкладень зустрічаються завдання, пов'язані з визначенням початкової суми за її кінцевою величиною, отриманою через t років при річному відсотку P (відсоткова ставка). Таке завдання називається дисконтуванням. Нехай дохід, що надходить щорічно, змінюється в часі і описується функцією $f(t)$ при питомій нормі відсотка $i=\frac{P}{100}$. Відсоток нараховується безперервно. Тоді дисконтований дохід K за час T визначається за формулою

$$K=\int_0^T f(t)e^{-it}dt .$$

Коли базове капіталовкладення становить N ум. од. і намічається щорічно збільшувати капіталовкладення на m ум. од., тоді:

$$f(t)=N+mt .$$

3.3.4 Витрати виробництва

Закономірність, яка визначає залежність між витратами виробництва певного товару і обсягом виробництва, називається функцією витрат. Якщо через K позначити сумарні витрати виробництва x одиниць продукту, тоді функцію сумарних витрат можна записати у вигляді $K = f(x)$. Функція

$$П = \frac{K}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

називається функцією середніх або умовних витрат.

Нехай $K = f(x)$ – змінні витрати виробництва. Середні витрати виробництва, якщо обсяг виробництва становить від a до b одиниць, обчислюються за теоремою про середнє значення функції.

3.3.5 Типові приклади за темою «Застосування інтегрального числення до розв'язання економічних задач»

Приклад 3.4. За даними досліджень у розподілі доходів в одній з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = x^3$, де x – частка населення, у – частка доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джині.

Розв'язання:

Обчислимо відношення площі сегмента OAf до площі трикутника OAB, тобто коефіцієнт Джині (див. рис. 3.3):

$$K = \frac{S_{OAf}}{S_{\Delta OAB}} = \frac{S_{\Delta OAB} - S_{OfAB}}{S_{\Delta OAB}} = \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OAB}} - \frac{S_{OfAB}}{S_{\Delta OAB}} = 1 - \frac{S_{OfAB}}{S_{\Delta OAB}} = 1 - \frac{S_{OfAB}}{1/2} = 1 - 2S_{OfAB}.$$

Згідно з геометричним змістом визначеного інтеграла отримаємо:

$$S_{OfAB} = \int_0^1 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 0{,}25.$$

Тоді $K = 1 - 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}5$.

Відповідь: $K = 0{,}5$, тобто розподіл доходів вважають нерівномірним.

Приклад 3.5. Протягом робочого дня зміна продуктивності праці характеризується функцією $f(t) = -t^2 + 5t + 6$. Знайти:

а) обсяг продукції, що випускається за час [0, 3];

б) середнє значення продуктивності за час [0, 3] і моменти t_0 та t_1, у які досягаються середнє і максимальне значення продуктивності;

в)результат пояснити графічно.

Розв'язання:

а) обсяг продукції, що випускається за час [0, T], обчислюється за формулою

$$U = \int_0^T f(t)dt .$$

Тому

$$U = \int_0^3 \left(-t^2 + 5t + 6\right)dt = \left(\frac{-t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} + 6t\right)\Bigg|_0^3 = \frac{-27}{3} + \frac{5\cdot 9}{2} + 6\cdot 3 - 0 = \frac{63}{2};$$

б) середнє значення продуктивності за час [0, T] обчислюється за формулою

$$F(c) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt .$$

Тому

$$f_{сер} = \frac{1}{3}\int_0^3 \left(-t^2 + 5t + 6\right)dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{63}{2} = \frac{21}{2}.$$

Щоб знайти момент часу t_0,у який досягається середнє значення продуктивності, розв'яжемо рівняння

$$f(t) = \frac{21}{2} \Rightarrow -t^2 + 5t + 6 = \frac{63}{6}.$$

Звідки

$$t_{0_1} = \frac{10-\sqrt{28}}{4} \approx 1{,}1,\; t_{0_2} = \frac{10+\sqrt{28}}{4} \approx 3{,}8 \notin [0;3].$$

Тобто $t_0 \approx 1{,}1$.

Щоб знайти момент часу t_1,у який досягається максимальне значення продуктивності, знайдемо вершину параболи:

$$f(t) = -t^2 + 5t + 6 .$$

Максимальне значення досягатиметься саме у вершині, тому що гілки параболи спрямовані вниз:

$$t_1 = t_в = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{-2} = 2{,}5;$$

в) для побудови параболи знайдемо координати вершини:

$$f(t_в) = f(2{,}5) = -(2{,}5)^2 + 5 \cdot 2{,}5 + 6 = 12{,}25.$$

Значить, вершина параболи знаходиться в точці $(2{,}5;12{,}25)$. Знайдемо точки перетину параболи з віссю Ot:

$$-t^2 + 5t + 6 = 0 \Rightarrow t_{01} = -1, \quad t_{02} = 6.$$

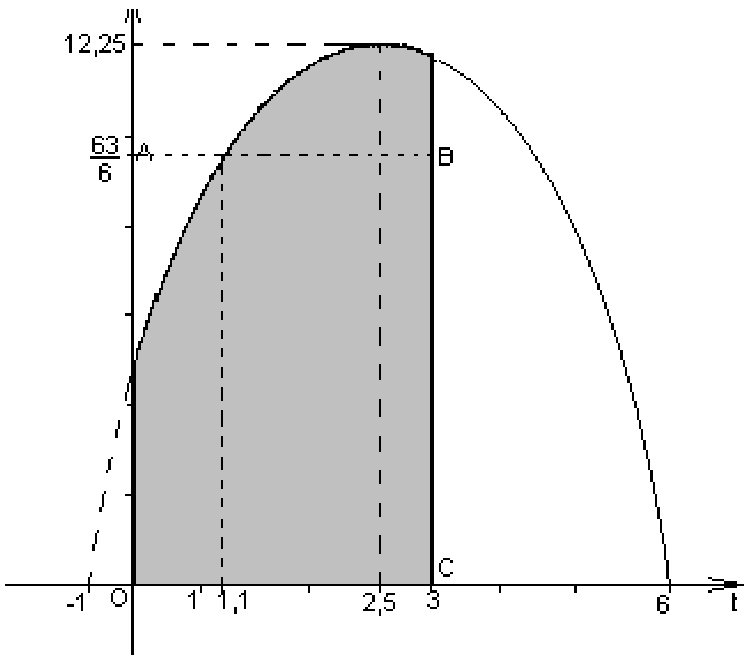

Рисунок 3.4

Графічно видно (рис. 3.4), що площа заштрихованої фігури, яка виражає собою обсяг продукції, що випускається за 3 години, дорівнює площі прямокутника, висотою якого є відрізок прямої, що дорівнює середньому значенню продуктивності праці за перші 3 години роботи.

Відповідь: а) обсяг продукції $U = \dfrac{63}{2}$; б) середнє значення продуктивності $f_{сер} = \dfrac{21}{2}$ в момент часу $t_0 \approx 1{,}1$, максимальне значення в момент часу $t_1 = 2{,}5$.

Приклад 3.6. Знайти середнє значення витрат $K = 2x^2 + 11x + 5$, якщо обсяг продукції x змінюється від 1 до 3 одиниць. Вказати обсяг продукції, при якому витрати набувають середнього значення. Результат пояснити графічно.

Розв'язання:

Середнє значення витрат, якщо обсяг продукції x змінюється від m до n одиниць обчислюється за формулою

$$l = \frac{1}{n-m}\int_m^n K(x)dx,$$

$$l = \frac{1}{3-1}\int_1^3 \left(2x^2+11x+5\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{11x^2}{2}+5x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2\cdot 27}{3}+\frac{11\cdot 9}{2}+5\cdot 3\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{11}{2}+5\right)\right) = \frac{107}{3}.$$

Щоб знайти обсяг продукції, при якому витрати набувають середнього значення, розв'яжемо рівняння

$$K(x) = l \Rightarrow 2x^2+11x+5 = \frac{107}{3}.$$

Звідки отримаємо:

$$x_1 = \frac{-33-\sqrt{3297}}{12} \approx -7{,}5 \notin [1{,}3],\; x_2 = \frac{-33+\sqrt{3297}}{12} \approx 2{,}03.$$

Пояснимо результат графічно. Графік функції є парабола $K = 2x^2+11x+5$, гілки якої спрямовані вгору. Знайдемо вершину параболи:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-11}{2\cdot 2} = \frac{-11}{4} = -2{,}75,$$

$$K(x_0) = K(-2{,}75) = 2\cdot(-2{,}75)^2 + 11\cdot 2{,}75 + 5 \approx 50.$$

Побудуємо параболу на відрізку від 1 до 3:

$$K(1) = 2\cdot 1^2 + 11\cdot 1 + 5 = 18,\; K(3) = 2\cdot 3^2 + 11\cdot 3 + 5 = 56.$$

Графічно видно (рис. 3.5), що площа прямокутника $ABCD$, стороною якого є відрізок $[1;3]$, а висотою – середнє значення функції на цьому відрізку, дорівнює площі заштрихованої ділянки.

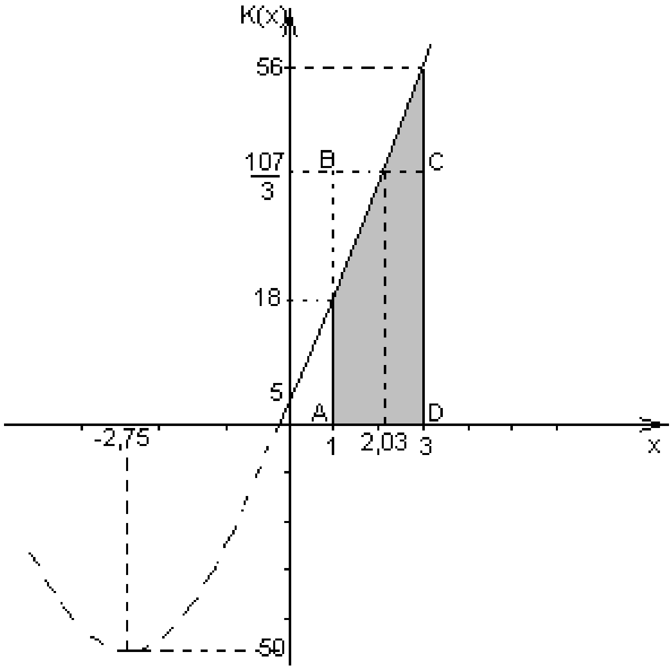

Рисунок 3.5

Відповідь: середнє значення $l = \dfrac{107}{3}$ при обсязі $x \approx 2{,}03$.

Приклад 3.7. Визначити дисконтований дохід *K* за 4 роки при процентній ставці $P = 6$ %, коли початкові капіталовкладення становили 12 тис. грн, і щорічно намічається збільшувати капіталовкладення на 1 тис. грн.

Розв'язання

Ведемо функцію $f(t) = N + mt$, де *N*– початкові капіталовкладення, *m* – сума, на яку намічається щорічно збільшувати капіталовкладення. Тобто $f(t) = 12 + t$. Дисконтований дохід за час *T* визначається за формулою $K = \int\limits_0^T f(t)e^{-it}dt$, де $i = \dfrac{p}{100} = \dfrac{6}{100} = 0{,}06$. Тоді

$$K = \int\limits_0^4 (12+t)e^{-0{,}06t}dt = \left| \begin{matrix} u = 12 + t, & dv = e^{-0{,}06t}dt \\ du = dt, & v = \dfrac{1}{-0{,}06}e^{-0{,}06t} \end{matrix} \right| =$$

$$= (12+t)\frac{1}{-0{,}06}e^{-0{,}06t}\Bigg|_0^4 - \int\limits_0^4 \frac{1}{-0{,}06}e^{-0{,}06t}dt$$

$$=(12+t)\frac{1}{-0,06}e^{-0,06t}\Bigg|_0^4-\frac{1}{(0,06)^2}e^{-0,06t}\Bigg|_0^4=$$

$$=\frac{-16}{0,06}e^{-0.24}+\frac{12}{0,06}-\frac{1}{(0,06)^2}e^{-0,24}+\frac{1}{(0,06)^2}\approx 49,5.$$

Відповідь: $K \approx 49,5$ тис. грн.

3.3.6 Задачі для самостійної роботи за темою «Застосування інтегрального числення до розв'язання економічних задач»

1. За даними досліджень у розподілі доходів в одній з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y=\sqrt[4]{x^5}$, де x – частка населення, y – частка доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джині.

2. Протягом робочого дня зміна продуктивності праці характеризується функцією $f(t)=-t^2+6t+16$. Знайти:

а) обсяг продукції, що випускається за час [0, 2];

б) середнє значення продуктивності за час [0, 2] і моменти t_0 та t_1, у які досягаються середнє і максимальне значення продуктивності;

в) результат пояснити графічно.

3. Знайти середнє значення витрат $K=3x^2+5x+2$, якщо обсяг продукції x змінюється від 1 до 3 одиниць. Указати обсяг продукції, при якому витрати набувають середнього значення. Результат пояснити графічно.

4. ВизначитидисконтованийдохідK за 3 роки при процентній ставці P = 5 %, коли початкові капіталовкладення становили 8 тис. грн, і щорічно намічається збільшувати капіталовкладення на 2 тис. грн.

4 ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

Завдання 1.1–1.25. Обчислити границі без використання правила Лопіталя.

1.1 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4-x^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{3x-13}{2x-5}\right)^{\frac{x+3}{x-8}}$.

1.2 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+5x}}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}(x+5)^{\frac{x+2}{x+4}}$.

1.3 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+11x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{2x-5}\right)^{\frac{1}{3-x}}$.

1.4 а) $\lim\limits_{x\to\infty}2\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2-2}{x}\right)^{\frac{1}{x+1}}$.

1.5 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x-2}{2}\right)^{\frac{x^2-3x}{x-4}}$.

1.6 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-x}{2}\right)^{\frac{2}{x-2}}$.

1.7 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+2x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x-2}{x-2}\right)^{\frac{x+4}{x}}$.

1.8 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+196x^2}-\sqrt{x+4x^2}}{2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\left(6x-x^2-4\right)^{\frac{1}{x^2-9x+20}}$.

1.9 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2-8x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^2-8x+8}{x+1}\right)^{\frac{2}{x-1}}$.

1.10 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x+3}}{\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3+x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{x^2+3x}{x+6}\right)^{\frac{3}{5+x}}$.

1.11 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x^2-3x+1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+4-x^2}{1-x^2}\right)^{x}$.

1.12 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{3x^2+2x^4}-\sqrt{12x}}{\sqrt[3]{3x^2+5x-1}}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{-2}{x+1}}$.

1.13 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+9x^3}-\sqrt{4x^2-3x}}{x\sqrt{x+7}}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2+4x+1}{x-1}\right)^{3x}$.

1.14 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}\right)^{\frac{x-1}{x}}$.

1.15 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x^2+x}-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-8x+16\right)^{\frac{1}{x^2-5x+6}}$.

1.16 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-7x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x}{2x^2-4}\right)^{\frac{5-3x}{2+x}}$.

1.17 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4-8x^3}}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\left(x^2+9x+21\right)^{\frac{x+6}{x+4}}$.

1.18 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{6x^2-x}}{x-4\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\left(x^2-8\right)^{\frac{1}{2(x+3)}}$.

1.19 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x}{\sqrt{x^4+2x^3}-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+x}{4-3x}\right)^{\frac{2x-1}{x^2+x}}$.

1.20 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2+3\right)^2-\left(x^2-6\right)^2}{\sqrt{x^4+3}-\sqrt{x^4+6x^3}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-13}{x-5}\right)^{\frac{x^2+3}{x-8}}$.

1.21 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+9x^2}-\sqrt{x^3+x^2}}{\sqrt{x+3}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6-3x+x^2}{x^2-2x}\right)^{3x}$.

1.22 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x+1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{x^2+10x+7}{x-1}}$.

1.23 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x+8x^2}{\sqrt{x^2+x^4}-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x+3-x^2}{x-1}\right)^{\frac{4}{x-3}}$.

1.24 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+5}-\sqrt{3x-2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2+1}{x+3}\right)^{\frac{x^2+3}{x+1}}$.

1.25 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-5x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2+x}{x^2}\right)^{\frac{3x+1}{x-2}}$.

Завдання 2.1–2.10. Для функції $y = f(x)$ обчислити w.

2.1 $y = \ln(x^2 + 1)$, $\quad w = y'' + (y')^2$.

2.2 $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{6x+1}}$, $\quad w = \dfrac{y'}{y^4}$.

2.3 $y = 4\dfrac{\arcsin x}{x^3}$, $\quad w = x^2 y' + 3xy$.

2.4 $y = x^2\left(4 - \dfrac{\cos 3x}{3}\right)$, $\quad w = y' - 2\dfrac{y}{x}$.

2.5 $y = x^2 \ln\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $\quad w = xy' - 2y$.

2.6 $y = x(1 - 2\sqrt{x})^2$, $\quad w = \dfrac{y - 2x\sqrt{y}}{y'}$.

2.7 $y = 2x\sqrt{3\sqrt{x} + 1}$, $\quad w = \dfrac{5y^2 - 4x^2}{y \cdot y'}$.

2.8 $y = x \cdot \sqrt{x^2 - 5}$, $\quad w = \dfrac{5x^2 + 2y^2}{y \cdot y'}$.

2.9 $y = \dfrac{x}{\ln x}$, $\quad w = x^2 y' + y(y - x)$.

2.10 $y = e^{4x}\sin x - x$, $\quad \mathrm{w} = \mathrm{y}'' - 8\mathrm{y}' + 17\mathrm{y}$.

Завдання 2.11–2.20. Обчислити похідну y' в точці x_0, коли:

2.11 $y = xtg2x + \ln\sqrt{\cos 2x}$, $\quad x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

2.12 $y = \ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$, $\quad x_0 = -1$.

2.13 $y = 25\arcsin\dfrac{x}{5} - x\sqrt{25 - x^2}$, $\quad x_0 = -4$.

2.14 $y = \ln\dfrac{2x - 4}{x} + \dfrac{1}{x - 2}$, $\quad x_0 = 3$.

2.15 $y = \sin\dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{3}\cos\dfrac{x}{3}$, $\quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

2.16 $y = \dfrac{e^{1-3x}}{9x - 2}$, $\quad x_0 = \dfrac{1}{3}$.

2.17 $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 5}}{x}$, $\quad x_0 = 3$.

2.18 $y = arctg\frac{x}{2} + \frac{2x}{x^2+4}$, $x_0 = -2$.

2.19 $y = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$, $x_0 = -4$.

2.20 $y = \arccos\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x_0 = \frac{5}{4}$.

Завдання 2.21–2.25. Показати, що функція $y = f(x)$ задовольняє рівняння:

2.21 $y = \sqrt[3]{2+3x-3x^2}$, $yy' = \frac{1-2x}{y}$.

2.22 $y = -\sqrt{\frac{2}{x^2} - 1}$, $1 + y^2 + xyy' = 0$.

2.23 $y = \ln(3 + e^x)$, $y' = e^{x-y}$.

2.24 $y = \mathrm{tg}\ln 3x$, $(1+y^2)dx = xdy$.

2.25 $y = (x^2+1)e^{x^2}$, $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

Завдання 3.1–3.9. Капітал V млн. грн може бути вкладений у банк під m % річних або інвестований у виробництво, до того ж ефективність вкладення у виробництво очікується в розмірі n % (на рік). Витрати задаються квадратичною залежністю $\frac{x^2}{a}$. Прибуток оподатковується в p % (табл. 4.1). Визначити, при якому p часткове розміщення у виробництво вигідніше, ніж чисте розміщення капіталу в банку.

Таблиця 4.1

Варіант	V	m	n	a
3.1	1	20	140	5
3.2	21	40	180	40
3.3	9	8	80	40
3.4	7	5	110	20
3.5	2	68	140	25
3.6	6	17	80	50
3.7	3	30	100	16
3.8	2	20	200	4
3.9	2	20	100	10

Завдання 3.10–3.15. Підприємство випускає і реалізує продукцію в обсязі Q ум. од. Функції витрат $C(Q)$ і ціни $P(Q)$ мають вигляд

$$C(Q) = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d\,, \quad P(Q) = AQ + B\,.$$

Знайти (табл. 4.2):

а) максимальний прибуток підприємства; обсяг і ціну, відповідні максимального прибутку;

б) середні і граничні витрати, що відповідають максимальному прибутку;

в) ділянки зростання і спадання прибутку на відрізку [*m;n*];

г) найменше значення витрат на [*m, n*].

Таблиця 4.2

Варіант	*a*	*b*	*c*	*d*	*A*	*B*	*m*	*n*
3.10	0,8	–1,8	–6	120	–0,6	66	1	8
3.11	0,96	2,16	1,44	10	–0,72	44,64	2	5
3.12	0,5	1,125	–1,5	4,5	–1,125	25,5	1	6
3.13	0,4	–0,3	–6	15	–0,3	24	3	7
3.14	0,7	1,575	–2,1	25,2	–0,525	48,3	2	6
3.15	0,6	–0,45	–5,4	12,4	–1,35	30,6	1	6

Завдання 3.16–3.20. Дослідним шляхом встановлено функції попиту *q (p)* і пропозиції *S (p)*:

$$q(p) = \frac{ap + b}{cp + d},\ S\,(p) = Ap + B,$$

де *p* – ціна товару;

q і *S*– кількості товару, що купується та запропонованого на продаж.

Знайти (табл. 4.3):

а) рівноважну ціну;

б) еластичність попиту і пропозиції для цієї ціни;

в) зміну доходу при збільшенні ціни на *m* % від рівноважної.

Зробити економічний аналіз результатів.

Таблиця 4.3

Варіант	*a*	*b*	*c*	*d*	*A*	*B*	*m*
6.16	1	7	1	1	1	1	6
6.17	-1	7	0	1	1	1	3
6.18	3	5	0	1	2	7	2
6.19	2	3	1	2	2	1	4
6.20	2	18	1	3	1	4	5

Завдання 3.21–3.25. Статистичним шляхом встановлено, що обсяг продукції цеху (ум. од.) протягом робочого дня описується функцією

$$u(t) = \frac{a}{3}t^3 + bt^2 + ct + d, 1 \le t \le 8,$$

де t – час, год.

Знайти (табл. 4.4):

а) продуктивність праці, швидкість і темп її зміни через m годин після початку роботи;

б) коли саме в часі продуктивність праці буде найбільшою. Результат пояснити аналітично і графічно.

Зробити економічний аналіз результатів.

Таблиця 4.4

Варіант	a	b	c	d	m
3.21	-10	30	160	400	5
3.22	-20	60	140	300	3
3.23	-40	140	150	200	4
3.24	-2	7	16	100	3,5
3.25	-8	28	102	300	2

Завдання 4.1–4.25. Знайти невизначені інтеграли. У п. а) результат перевірити диференціюванням:

4.1 а) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^3+8}$; в) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

4.2 а) $\int e^x \ln(1+3e^x)dx$; б) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x}$;

4.3 а) $\int x \cdot 3^x dx$; б) $\int \frac{(3x-7)dx}{x^3+4x^2+4x+16}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$;

4.4 а) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$; в) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$;

4.5 а) $\int x^2 e^{3x}dx$; б) $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$; в) $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$;

4.6 а) $\int x \arcsin\frac{1}{x}dx$; б) $\int \frac{x+3}{x^3+x^2-2x}dx$; в) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\left(\sqrt{x}+4\right)\sqrt[4]{x^3}}dx$;

4.7 а) $\int x\ln\left(x^2+1\right)dx$; б) $\int \frac{x^2-3}{x^4+5x^2+6}dx$; в) $\int \frac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt[3]{x+5}}dx$;

4.8 а) $\int x\sin x\cos x dx$; б) $\int \frac{x^2dx}{x^4-81}$; в) $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$;

4.9 а) $\int x^2\sin 4x dx$; б) $\int \frac{x^2-x+1}{x^4+2x^2-3}dx$; в) $\int \frac{\sqrt{x}-1+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

4.10 а) $\int x\ln^2 x dx$; б) $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$; в) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$;

4.11 а) $\int x^3\ln x dx$; б) $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$; в) $\int \mathrm{tg}^3 2x dx$;

4.12 а) $\int x\cos 5x dx$; б) $\int \frac{2x^2+x+1}{x^3+x}dx$; в) $\int \cos^3 x\sin^2 x dx$;

4.13 а) $\int x^3 \mathrm{arctg}\, x dx$; б) $\int \frac{x+5}{x^4+2x^3+x^2}dx$; в) $\int \sin^2 2x dx$;

4.14 а) $\int \mathrm{arctg}\frac{1}{x}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$; в) $\int \sin^5 x\cos^2 x dx$;

4.15 а) $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$; б) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$; в) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$;

4.16 а) $\int \sqrt{x}\ln x dx$; б) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}dx$; в) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$;

4.17 а) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$; б) $\int \frac{2x^2-3x+12}{x^3+x^2-6x}dx$; в) $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$;

4.18 а) $\int \arcsin\frac{x}{2}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+36x-72}$; в) $\int \frac{dx}{3-5\cos x}$;

4.19 а) $\int x^2\ln x dx$; б) $\int \frac{x^2-3}{x^3+2x^2-3x}dx$; в) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}$;

4.20 $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$; б) $\int \frac{x dx}{x^3-3x+2}$; в) $\int \cos 4x\cos 7x dx$;

4.21 а) $\int x\cos 2x dx$; б) $\int \frac{x^3+6}{x^2+5x-6}dx$; в) $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$;

4.22 а) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$; б) $\int \frac{x^3-2}{x^2-5x+6}dx$; в) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1+x}}dx$;

4.23 а) $\int x^4\ln x dx$; б) $\int \frac{x^3+2}{x^2-x-2}dx$; в) $\int \frac{1-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$;

4.24 а) $\int xe^{-x/2}dx$; б) $\int \frac{x^3+5}{x^2-2x-3}dx$; в) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx$;

4.25 а) $\int \sqrt[3]{x}\ln x dx$; б) $\int \frac{x^3-5}{x^2-6x+5}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}\left(1+\sqrt[3]{x-2}\right)}$.

Завдання 5.1–5.8. За даними досліджень розподілу доходів в одній з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y=f(x)$, де x– частка населення, y – частка доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джині. Накреслити і проаналізувати отриманий результат.

5.1 $f(x)=\frac{x}{1+\sqrt{1-x}}$. 5.2 $f(x)=\frac{x^2}{x+1-x^2}$.

5.3 $f(x)=x\left(1-\sqrt{1-x}\right)$. 5.4 $f(x)=\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt[3]{1-x}}$.

5.5 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$. 5.6 $f(x)=x\cdot e^{x-1}$.

5.7 $f(x)=\frac{x}{1+\sqrt[3]{1-x}}$. 5.8 $f(x)=\frac{2}{\pi}\arcsin x$.

Завдання 5.9–5.15. Визначити дисконтований дохід *K* за *T* років при процентній ставці *P*, якщо початкові капіталовкладення становили *N* тис. грн., і намічається щорічно збільшувати капіталовкладення на *m* тис. грн. Знайти $\lim\limits_{T\to\infty} K(T)$ (табл. 4.5).

Таблиця 4.5

Варіант	*T*	*P*, %	*N*, тис. грн	*m*, тис. грн
5.9	3	7	10	0.7
5.10	4	6	12	1
5.11	5	8	16	1.2
5.12	4	9	14	1
5.13	3	6	10	0.8
5.14	6	8	8	0.5
5.15	5	5	14	1.5

Завдання 5.16–5.20. Протягом робочого дня зміна продуктивності праці характеризується функцією $f(t)=at^2+bt+c$. Знайти (табл. 4.6):

1) обсяг продукції, що випускається за годину [0, *T*];

2) середнє значення продуктивності за час [0, *T*] і моменти t_0 і t_1, у які досягаються середнє і максимальне значення продуктивності.

Результат пояснити графічно.

Таблиця 4.6

Варіант	T	a	b	c
5.16	6	-2	12	14
5.17	4	-3	18	48
5.18	3	-1	5	6
5.19	5	-2	10	28
5.20	7	-1	4	21

Завдання 5.21–5.25. Знайти середнє значення витрат $K = ax^2 + bx + c$, якщо обсяг продукції x змінюється від m до n одиниць (табл. 4.7). Вказати об'єм продукції, при якому витрати набувають середнього значення. Результат пояснити графічно.

Таблиця 4.7

Варіант	a	b	c	m	n
5.21	3	4	1	0	3
5.22	2	5	2	1	4
5.23	1/2	2	3/2	0	5
5.24	2	11	5	1	3
5.25	1	13/3	4/3	2	4

ЛІТЕРАТУРА

1. **Макаренко, В. О.** Вища математика для економістів : навч. посібник / В. О. Макаренко. – Київ : Знання, 2008. – 517 с. : іл.

2. **Пискунов, А. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. /А. С. Пискунов.– М. : Наука, 1970–1985. – Т. 1. – 436 с.

3. **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевников. – М. : Высш. школа, 2002. – Ч. I, II.-– С. 312–278.

4. Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд. – М. : Банки и биржи, 2010. – 479 с.

5. **Шкіль, М. І.** Вища математика. У 3 кн. Кн. I. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу : підручник /М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – К. : Либідь, 1994. – 280 с.

6. **Шкіль, М. І**. Вища математика. У 3 кн. Кн. II. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди : підручник / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – К. : Либідь, 1994. – 352 с.

7. Вища математика: підручник / Домбровський В. А., Крижанівський І. М., Мацьків Р. С., Мигович Ф. М., Неміш В. М., Окрепкий Б. С., Хома Г. П., Шелестовська М. Я.; за редакцією Шинкарика М. І. – Тернопіль : Видавництво Карп'юка, 2003.– 480 с.

8. **Барковський, В. В.** Вища математика для економістів: навч. посібник / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – 5-е вид. – К. : Центр учбової літератури, 2010. – 448 с.

9. **Берегова, Г. І.**Математика для економістів: вищала тематика (перша частина) :навч. посібник/ Г. І. Берегова, В. Н. Гладунський. – К. : УБС НБУ, 2014. – 374 с.

10. **Малярець, Л. М.** Математика для економістів. Вища математика для економістів: навч. посібник/ Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, А. В. Ігначкова. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. – Ч. 2. – 368 с.

Навчальне видання

ШЕВЦОВ Сергій Олександрович
ГРУДКІНА Наталія Сергіївна

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ЕКОНОМІКИ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Навчальний посібник
до практичних занять і самостійної роботи

Редагування, комп'ютерне верстання I. I. Дьякова

160/2019. Формат 60 х 84/16. Ум. друк. арк. 2,26.
Обл.-вид. арк1,10. Тираж 50 прим. Зам. № 17

Видавець і виготівник
Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 1633 від 24.12.2003